RAZONES Y PROPORCIONES

DESARROLLO DEL TEMA

I. RAZÓN

Es la comparación entre dos cantidades, la misma que se establece a través de dos operaciones matemáticas lo cual determina las dos clases de razones.

A. Razón aritmética

Es la comparación de dos cantidades mediante una diferencia. Sean a y b los números, con a mayor que b, tenemos:

$$a - b = r$$

Donde:

a : Antecedente
b : Consecuente
r : valor de la razón

Ejemplo:

Si Alejandra tiene 10 años y su hermana María tiene 8 años se puede establecer que la razón aritmética de sus edades es 2, es decir:

$$10 - 8 = 2$$

Lo cual representa que:

- María es excedida por Alejandra en 2 años.
- Alejandra excede a María en 2 años.
- Alejandra es mayor que María en 2 años.

B. Razón geométrica

Es la comparación de dos cantidades mediante la división de dichas cantidades. Sean a y b los números, entonces:

$$\frac{a}{b} = k$$

Donde:

a : Antecedente b: Consecuente
k : valor de la razón

Ejemplo:

La expresión $\frac{a}{b} = \frac{2}{7}$ indica o representa:

- La razón geométrica de a y b es 2/7.
- "a" es a "b" como 2 es a 7.
- "a" y "b" son entre sí como 2 es a 7.
- "a" y "b" están en la relación de 2 a 7.
- Por cada 2 unidades de "a" hay 7 unidades de "b".

Recuerda:
A partir de aquí en adelante al término razón y no especificar de que clase es, hablaremos de la razón geométrica

C. Series de razones geométricas equivalentes (SRGE)

Es un conjunto de razones todas iguales entre sí que poseen el mismo valor el cual se convierte en el valor de toda la serie.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \ldots = \frac{m}{n} = k$$

Propiedades

- $$\frac{a + c + \ldots + m}{b + d + \ldots + n} = k$$
- $$\frac{a \times c \times \ldots \times m}{b \times d \times \ldots \times n} = k^{\alpha}$$

α: N.° de razones

Serie de Razones Geométricas Equivalentes Continuas

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$$

Donde:

$c = dk$; $b = dk^2$; $a = dk^3$

II. PROPORCIÓN

Es el resultado de tener dos razones de la misma clase que tienen igual valor. Pueden ser:

A. Proporción aritmética

- **Discreta**

Cuando los términos medios son diferentes entre sí.

$$a - b = c - d$$

a y d : extremos
b y c : medios
d : cuarta diferencial

- **Continua**

Cuando los términos medios son iguales.

$$a - b = b - c$$

a y c : extremos
c : tercera diferencial
b : media diferencial

B. Proporción geométrica

- **Discreta**

Es cuando los términos medios son diferentes entre sí.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a y d : extremos
b y c : medios
d : cuarta proporcional

- **Continua**

Cuando los términos medios son iguales.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

a y c : extremos
c : tercera proporcional
b : media proporcional

Proporción Aritmética	
Discreta	**Continua**
Extremos $a - b = c - d$ Medios d: cuarta diferencial de a, b y c.	Extremos $a - b = b - c$ Medios b: media diferencial de a y c. $b = \frac{a + c}{2}$ c: Tercera diferencial de a y b.
Proporción Geométrica	
Discreta	**Continua**
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ d: Cuarta proporcional de a, b y c.	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ b: Media proporcional de a y c. $b = \sqrt{a.c}$ c: Tercera proporcional de a y b

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

La suma de dos números excede en 36 a su diferencia. Si el menor es respecto del mayor como 3 es a 8, el número mayor es:

A) 48
B) 40
C) 32
D) 16
E) 56

UNMSM 2004-I
NIVEL FÁCIL

Resolución:

$\Rightarrow (a+b) - (a - b) = 36$

$b = 18$

$\Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{a}{8}$

$\frac{18}{3} = \frac{a}{8}$

$a = 48$

Respuesta: 48

Problema 2

Si dos personas tienen 40 y 30 años. ¿Dentro de cuántos años la relación de sus edades será de 6 a 5?

A) 10
B) 15
C) 20
D) 22
E) 30

UNMSM 2006-II
NIVEL FÁCIL

Resolución:

Sea x el número de años

$$\frac{40+x}{6}=\frac{30+x}{5}$$

$$x = 20$$

Respuesta: 20

Problema 3

Antes que empiece una asamblea había 690 personas y por cada 8 varones había 15 damas. Iniciada la asamblea llegaron 30 damas. Hallar la nueva relación de los varones con respecto a las damas.

A) 24/25 B) 1/2
C) 1/3 D) 8/45
E) 7/16

UNMSM 2008-II
NIVEL FÁCIL

Resolución:

Sea:
H: cantidad de hombres
M: cantidad de mujeres
Se tiene H + M = 690
además:

$$\frac{H}{8}=\frac{M}{15}$$

$$\frac{H+M}{8+15}=\frac{H}{8}=\frac{M}{15}=30$$

Si llegan 30 mujeres:

M = 450 + 30 = 480

H = 240

Entonces la nueva relación será:

$$\frac{H}{M}=\frac{240}{480}=\frac{1}{2}$$

Respuesta: 1/2

PROMEDIOS

DESARROLLO DEL TEMA

Es una cantidad representativa de un conjunto de valores (medidas de tendencia central).

De los valores, se tiene:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots\ldots \leq a_n$$

MENOR VALOR	≤	PROMEDIO	≤	MAYOR VALOR

I. TIPOS DE PROMEDIO

A. Promedio Aritmético o Media Aritmética ($\overline{MA}$)

o simplemente promedio

$$\overline{MA} = \frac{\text{Suma de datos}}{\text{Número de datos}}$$

- Dar la MA de: 7; 13 y 4

  Resolución

  $$\frac{7 + 13 + 4}{3} = 8$$

Nota:
Sea "n" números y "S" suma de los números
$\Rightarrow S = n \cdot \overline{MA}$ ("n" números)

B. Promedios Geométricos o Media Geométrica ($\overline{MG}$)

$$\overline{MG} = \sqrt[n]{\text{Producto de los datos}}$$

n: número de datos

- Dar la $\overline{MG}$ de: 5; 15 y 45

  Resolución

  $$\sqrt[3]{5 \cdot 15 \cdot 45} = 15$$

C. Promedio Armónico o Media Armónica ($\overline{MH}$)

$$\overline{MA} = \frac{\text{Número de datos}}{\text{Suma inversa de datos}}$$

- Dar la $\overline{MH}$ de: 2; 6 y 12

  Resolución

  $$\frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = \frac{3}{\frac{9}{12}} = 4$$

Propiedades

1. Para datos diferentes

$$\overline{MH} < \overline{MG} < \overline{MA}$$

menor promedio — mayor promedio

2. Datos iguales

$$\overline{MH} = \overline{MG} = \overline{MA}$$

3. Para dos datos

MA	MG	MH
$\frac{a+b}{2}$	$\sqrt{ab}$	$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$

Se cumple:

$$\overline{MG}^2 = \overline{MA} \times \overline{MH}$$

$$(a-b)^2 = 4(\overline{MA}^2 - \overline{MG}^2)$$

4. Datos en progresión aritmética

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

el promedio de todos los términos:

$$\overline{MA} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

5. La alteración de la media aritmética

Sean los números: 3, 5 y 10

$$\overline{MA} = \frac{3 + 5 + 10}{3} = 6$$

Si aumentamos 7 unidades al 5 y disminuimos 4 al 10:

$$P_{final} = \frac{3 + (5 + 7) + (10 - 4)}{3}$$

$$P_{final} = \frac{3 + 5 + 10}{3} + \frac{7 - 4}{3}$$

$$P_{final} = P_{inicial} + \text{Variación}$$

$$\text{Variación} = \frac{(\text{Aumenta}) - (\text{Disminuye})}{\text{Total datos}}$$

D. Promedio ponderado ($\overline{PP}$) (Promedio de Promedios)

- Al dar 3 exámenes, obtengo 11, 17 y 13; siendo los pesos de cada examen 2, 1 y 3. ¿Cuál será mi nota promedio?

Resolución:

NOTAS	PESOS	TOTAL
11	2	11 × 2
17	1	17 × 1
13	3	13 × 3
	6	78

La nota promedio será:

$$\frac{11.2 + 17.1 + 13.3}{2 + 1 + 3} = \frac{78}{6} = 13$$

En general:

$$\overline{PP} = \frac{a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + \ldots + a_nP_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n}$$

Donde:

a_n: enésimo de las notas, precios, ... etc.

P_n: enésimo de los promedios, peso frecuencias, créditos, ..., etc.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

El promedio de 6 números es x, si se retira el mayor, el promedio se reduce en 4 unidades. Halle la diferencia entre x y el número mayor retirado.

A) −24 B) 24 C) 20
D) −20 E) 30

UNMSM 2001
NIVEL FÁCIL

Resolución:

$\overline{MA}(6N°) = x$

$\frac{\sum 6N°}{6} = x$

$\sum 6N° = 6x$

$\sum 5N° + \text{Mayor} = 6x$

$\sum 5N° = 6x - \text{Mayor}$ .....(1)

Donde:

$\overline{MA}(5N°) = x - 4$

$\frac{\sum 5N°}{5} = x - 4$

$\frac{6x - \text{Mayor}}{5} = x - 4$

$6x - \text{Mayor} = 5x - 20$

$\text{Mayor} - x = 20$

Respuesta: 20

Problema 2

Juan viaja de A a B y, recíprocamente de B a A con velocidades medias de 30 y 60 millas por hora; respectivamente. La velocidad media en el viaje completo es:

A) 40m/h B) 50m/h C) 45m/h
D) 35m/h E) 30m/h

UNMSM 2004-I
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

Como aplicación de la media armónica tenemos el cálculo de la rapidez media

$V_{promedio} = \overline{MH}(\text{Velocidades})$

$V_{promedio} = \frac{2 \times 30 \times 60}{30 + 60}$

$V_{promedio} = 40$

Respuesta: 40m/h

Problema 3

La media aritmética de 30 números es 20. Si agregamos 20 números cuya suma es 600, halle la media aritmética de los 50 números.

A) 30 B) 10
C) 20 D) 24
E) 60

UNMSM 2013-I
NIVEL FÁCIL

Resolución:

$\sum 50N° = \sum 30N° + \sum 20N°$

$\sum 50N° = 30 \times 20 + 600w$

Donde:

$\overline{MA}(50N°)$

$\Rightarrow \frac{\sum 50N°}{50}$

$\Rightarrow \frac{1200}{50} = 24$

Respuesta: 24

MAGNITUDES PROPORCIONALES

DESARROLLO DEL TEMA

I. MAGNITUD

Es todo aquello susceptible a ser medido y que puede ser percibido por algún medio. Una característica de las magnitudes es el poder aumentar o disminuir.
Por ejemplo a un niño se le podría medir: su peso, estatura, presión arterial, etc.

II. CANTIDAD (VALOR)

Resultado de medir el cambio o variación que experimenta la magnitud.

Magnitudes	Longitud
Longitud	2 km
Tiempo	7 días
N.° de obreros	12 obreros

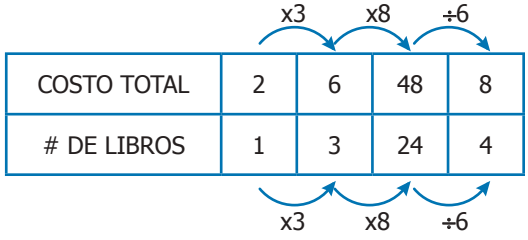
III. RELACIONES ENTRE 2 MAGNITUDES

Dos magnitudes son proporcionales, cuando al variar el valor de una de ellas, el valor correspondiente de la otra magnitud cambia en la misma proporción. Se pueden relacionar de 2 maneras.

A. Magnitudes Directamente Proporcionales (DP)

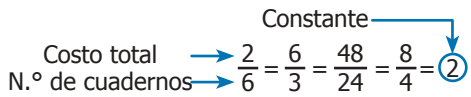
Ejemplo ilustrativo:

- Si compramos libros cada uno a S/ 2 (Precio constante); al analizar como varia el valor de costo total, cuando el número de libros varía, se tendrá:



⇒ (Costo total) DP (N.° de libros)

Se observó:

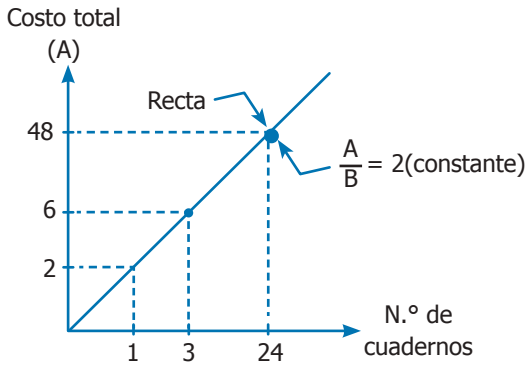


En general:
Decimos que las magnitudes "A" y "B" son directamente proporcionales; si al aumentar o disminuir los valores de la magnitud de "A", el valor de "B" también aumenta o disminuye en la misma proporción.
La condición necesaria y suficiente para que dos magnitudes sean D.P. es que el cociente de cada par de sus valores correspondientes, sea una constante.

OJO:
Debemos considerar que al relacionar 2 magnitudes, las demás no deben variar del ejemplo anterior, el precio de cada libro, no varía (permanece constante).

Si: "A" DP "B" $\leftrightarrow \frac{(\text{Valor de A})}{(\text{Valor de B})} = k \rightarrow$ constante

Interpretación geométrica



IMPORTANTE

I. La gráfica de 2 magnitudes D.P es una recta que pasa por el origen de coordenadas

II. En cualquier punto de la gráfica (excepto el origen de coordenadas) el cociente de cada par de valores correspondientes resulta una constante.

III. Si tenemos que "A" DP "B"

	Valores correspondientes				
Magnitud A	a_1	a_2	a_3	....	a_n
Magnitud B	b_1	b_2	b_3	....	b_n

Se verifica:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=k$$

IV. Si tenemos que "A" DP "B"

$$\boxed{F(X)=mX}$$

m: pendiente (constante)

B. Magnitudes inversamente proporcionales (IP)

Ejemplo ilustrativo:

- Para pintar las 60 habitaciones idénticas de un edificio se desea contratar obreros que pinten una habitación. Al analizar cómo varía el tiempo según el número de pintores contratados, se tendrá:

	x2	x3	x5	
N° DE PINTORES	1	2	6	30
N° DE DÍAS	60	30	10	2
	÷2	÷3	÷5	

$\Rightarrow$ (# de pintores) IP (# días)

Se observa:

(# de pintores)(# días) = 1.60 = 2.30 = 6.10 = 30. 2 = (60)

Constante

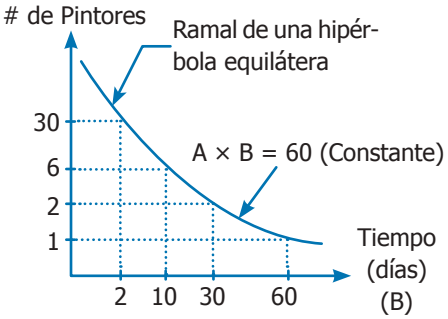
En general:

Se dice que "A" y "B" son inversamente proporcionales, si al aumentar o disminuir el valor de A, el respectivo valor de "B" disminuye o aumenta en la mismas proporción respectivamente.

La condición necesaria y suficiente para que dos magnitudes sean IP es que el producto de cada par de sus valores correspondientes sea una constante.

$$\boxed{A\ I.P.B \leftrightarrow (\text{valor de A})(\text{valor de B}) = \text{cte.}}$$

Interpretación Geométrica



IMPORTANTE:

I. La gráfica de dos magnitudes ip es una rama de hipérbola equilátera.

II. En cualquier punto de la gráfica el producto de cada par de valores correspondientes resulta una constante.

III. La función de proporcionalidad inversa será:

$$\boxed{F(x)=\frac{m}{x}}$$

m: Constante [área del rectángulo bajo la curva]

IV. Si tenemos que "A" IP "B"

	Valores Correspondientes				
Magnitud A	a_1	a_2	a_3	....	a_n
Magnitud B	b_1	b_2	b_3	....	b_n

Se verifica:

$a_1 . b_1 = a_2 . b_2 = a_3 . b_3 = \ldots = an . bn = k$

III. PROPIEDADES DE LAS MAGNITUDES

A. Para 2 magnitudes A y B se cumple:

1. $\begin{cases} *A\ D.P\ B \Leftrightarrow B\ D.P.\ A \\ *A\ I.P\ B \Leftrightarrow B\ I.P.\ A \end{cases}$

2. $\begin{cases} *A\ D.P\ B \Leftrightarrow A^n\ D.P.\ B^n \\ *A\ I.P\ B \Leftrightarrow A^n\ I.P.\ B^n \end{cases}$

3. $\begin{cases} *A\ D.P\ B \Leftrightarrow A\ I.P.\ \frac{1}{B} \\ *A\ I.P\ B \Leftrightarrow A\ D.P.\ \frac{1}{B} \end{cases}$

B. Para 3 magnitudes A, B y C se cumple:

Si: A D. P. B (C es constante)

A D. P. C (B es constante)

$\Rightarrow$ A D. P. (B . C)

$\therefore \frac{A}{B\ .\ C}$

En general: Sean las magnitudes: A, B, C, D y E donde:

$$\left.\begin{array}{lll} A & D.P. & B \\ A & I.P. & C \\ A & A.P. & D \\ A & D.P. & E \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A.C}{B.D.E} = cte$$

OJO
Cuando relacionamos los valores de 2 magnitudes, entonces los valores de las otras magnitudes permanecen constantes.

Consecuencia de la propiedad

- **Obras**

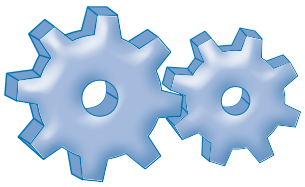
$$\frac{(\text{Obreros})(\text{días})(\text{h/d})(\text{eficiencia})}{(\text{obra})(\text{dificultad})} = \text{cte.}$$

- **Regla de compañía**

$$\frac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})(\text{tiempo})} = \text{cte.}$$

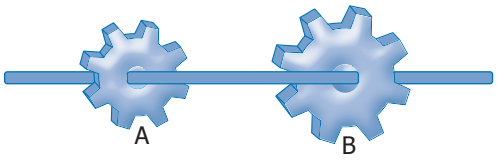
- **Engranajes**

a) Concatenados



(N.° vueltas)(N.° dientes) = cte.

b) Unidos por un eje



$V_A = V_B$ (vueltas)

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1
Se usan 4/5 de una camionada de uva para elaborar 1/5 de la producción anual de vino en cierto depósito de licor. ¿Cuántas camionadas de uvas se necesitan para elaborar el total de vino anual?

A) 8 B) 2
C) 4 D) 16/5
E) 8/5

UNMSM 2005-I
NIVEL FÁCIL

Resolución:

Camionada	Producción
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
x	1

$$\frac{\text{Camionadas}}{\text{Producción}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{x}{1}$$

$x = 4$

Respuesta: 4

Problema 2
Un albañil puede construir una casa en 20 días, pero con la ayuda de su hijo pueden construirla en 15 días. Si el hijo trabajara solo, ¿en cuántos días construiría la misma casa?

A) 75 B) 50 C) 40
D) 45 E) 60

UNMSM 2009-I
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

Obra x persona	Días
A	20
A + H	15
H	X

Obra por persona × días

$A \times 20 = (A+H) \times 15 = H \times X$
$A \times 4 = A \times 3 + H \times 3$
$A = 3H$

Donde:
$A \times 20 = H \times X$
$3H \times 20 = H \times X$
$X = 60$

Respuesta: 60

Problema 3
Pedro realiza un trabajo en 10 horas y su ayudante, en 15 horas. El ayudante comienza primero y, después de 5 horas, trabajan juntos hasta terminar la obra. ¿Cuántas horas trabajaron juntos?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 3 E) 7

UNMSM 2013-II
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

Pedro 1h ..... $\frac{1}{10}$

Ayudante 1h ..... $\frac{1}{15}$

5h x

$x = \frac{1}{3}$ de obra

Juntos:

1 h ..... $\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{6}$

y ..... $\frac{2}{3}$

Luego: y = 4 horas

Respuesta: 4

CONJUNTOS I

DESARROLLO DEL TEMA

I. INTRODUCCIÓN

La idea de conjunto se adquiere en los comienzos de la vida, al manifestarse una de las virtudes primordiales del espíritu, la diferenciación, se empieza a percibir distintamente los objetos del mundo exterior, y a tener conciencia de la propia personalidad, originándose estos conceptos primarios, desarrollaremos aquí, en forma breve y explícita, lo que suele llamarse "Teoría Intuitiva de Conjuntos", así como definiciones y consecuencias que derivan inmediatamente de ellos y que servirán como preámbulo al desarrollo profundo de la aritmética. Comenzaremos destacando el trabajo desarrollado por G. Cantor, a quién con justicia se le reconoce como "Creador o padre de la teoría de conjuntos".

II. CONCEPTO PREVIOS

A. idea de conjunto

En matemática **Conjunto y elemento**, son conceptos primitivos que no se definen y se consideran conceptos fundamentales. Intuitivamente, un **Conjunto** es una colección o agrupación de objetos llamados **Elementos**.

Así, por ejemplo: El conjunto de vocales estará formado por las letras "a", "e", "i". "o" y "u" que se llaman **elementos** del conjunto de las vocales.

Generalmente los conjuntos se denotan por letras mayúsculas "A", "B", "C", etc. y los elementos por letras minúsculas u otros símbolos, separados por comas y encerrados entre llaves.

Ejemplo:

Si llamamos "A" al conjunto de vocales, entonces:

A = {a, e , i, o, u}

B. Relación de pertenencia

Es un concepto primitivo que relaciona los elementos con los conjuntos; es decir, si un elemento está en un conjunto o forma parte de él, diremos que "pertenece" a dicho conjunto y lo denotaremos con el símbolo "$\in$" y en el caso de no pertenecer por "$\notin$".

Por ejemplo, para el conjunto: A = {a, e , i, o, u}; diremos:

a $\in$ A: Se lee "a" pertenece a "A"

b $\notin$ A: Se lee "b" no pertenece a "A"

La pertenencia sólo se da entre elemento y conjunto.

C. Determinación de conjuntos

Se dice que un conjunto está determinado cuando se sabe con precisión que elementos pertenecen al conjunto y que elementos no pertenecen al conjunto, existen 2 formas principales para determinar conjuntos.

1. Por extensión

Cuando sus elementos están indicados explícitamente, es decir, se mencionan en forma completa los elementos del conjunto.

Ejemplo:

A = {7; 8; 9; 10; 11};

Se lee: "A" es el conjunto cuyos elementos son: 7; 8; 9; 10 y 11.

2. Por comprensión

Cuando se enuncia una propiedad común que caracteriza a los elementos de dicho conjunto.

Así, por ejemplo, del ejercicio anterior:

A = {x/x $\in$ N ; 6 < x < 12}

Se lee: "A" es el conjunto de los elementos "x", tal que "x" es un número natural, además es mayor que 6 pero menor que 12.

D. Cardinal de un conjunto

Es el número de elementos diferentes que posee un conjunto finito.

Ejemplo:

Sea: A = {a, e, i, o, u}

Entonces: n(A) = 5

Que se lee: El cardinal de "A" es 5.

E. Conjuntos especiales

1. Conjunto Vacío o Nulo

Es aquel conjunto que no posee elementos. Se le representa por: { } y se denota por el símbolo: ∅.
Es decir: $\{x/x \neq x\} = \{\ \} = \varnothing$

Ejemplo:
$\{x/x \in N; 5 < x < 6\} = \{\ \}$
No existe un "$x \in N$" que sea mayor que 5 y menor que 6 a la vez.

2. Conjunto Unitario

Es aquel que está constituido por un solo elemento.

Ejemplo:
$\{x/x \in N; 5 < x < 7\} = \{6\}$
puesto que "$6 \in N$" es el único comprendido entre 5 y 7.

3. Conjunto Universal

Es un conjunto referencial que contiene a todos los conjuntos considerados y se le denota generalmente por "U".
Así por ejemplo, el conjunto "U" para los siguientes conjuntos:
A = {2; 4; 6; 8} y B = {1; 3; 5; 7; 9}
$U = \{x/x \in N; 1 \leq x \leq 9\}$ ó
$U = \{x/x \in N; x < 10\}$ ó
$U = \{x/x \in Z\}$

F. Relaciones entre conjuntos

1. Inclusión de Conjuntos

$A \subset B \Leftrightarrow \forall\, x \in A \rightarrow x \in B$
Se lee: "A" está incluido en "B", si y solo si, para todo "x" que pertenece a "A", este también pertenece a "B".

- Además:
  $A \subset B$
  "A" está incluido en "B"
  "A" está contenido en "B"
  "A" es subconjunto de "B"
- $n[\text{subconjuntos "A"}] = 2^{n(A)}$
- $n[\text{subconjuntos propios de "A"}] = 2^{n(A)} - 1$

2. Igualdad de Conjuntos

Si todos los elementos del conjunto "A" pertenecen al conjunto "B", y todos los elementos del conjunto "B" pertenecen también al conjunto "A". Esta igualdad de los conjuntos "A" y "B" se denota por: A = B.

Ejemplo: Si:
A = {x/x es una letra de la palabra AROMA}
B = {x/x es una letra de la palabra MAROMA}
Entonces:
A = {A, R, O, M}
B = {M, A, R, O}
Luego: A = B

3. Conjunto Potencia

Sea: A = {a, b}; todos los subconjuntos de este conjunto son: {a}; {b}; {a, b}; ∅
Al conjunto cuyos elementos son los subconjuntos anteriores, se le llama también **conjunto de partes de "A"** y se le denota:
P(A) = {∅, {a}, {b}, {a, b}}
En general, el número de subconjuntos se halla con la siguiente relación: 2^n; donde "n" es el número de elementos del conjunto.

$\Rightarrow \boxed{n[P(A)] = 2^{n(A)}}$

Ejemplo:
A = {m, a, r};
Entonces:
P(A) = {{m} , {a} , {r} , {m, a} , {m, r} , {a, r}, {m, a, r}, ∅}
$n[P(A)] = 2^3 = 8$

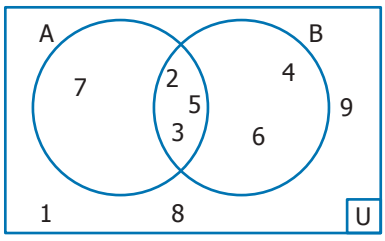
G. Representación gráfica de los conjuntos

1. Diagrama de Venn – Euler

Es una forma ilustrativa y muy práctica para comprender intuitivamente las relaciones entre conjuntos.

Ejemplos:
A = {2; 3; 5; 7}
B = {2; 3; 4; 5; 6}
U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

Entonces:

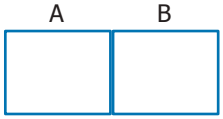


La interpretación sería:
- {7} sólo pertenece a "A"
- {2; 3; 5} pertenecen a "A" y a "B"
- {4; 6} solo pertenece a "B"
- {1; 8; 9} no pertenecen a los conjuntos "A" y "B"

2. Diagrama de Carroll

Se usa generalmente para representar conjuntos disjuntos.

Ejemplo:
Para 2 conjuntos cualesquiera:



- A → Puede representar a los mujeres
  B → Puede representar a los hombres

- A → Puede representar capitalinos
  B → Puede representar provincianos

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Determine por extensión el siguiente conjunto:

$A=\{5x+1<3x+11<4x+10 / x \in Z\}$

la suma de los elementos de A es ...

A) 3 B) 4
C) 5 D) 9
E) 11

NIVEL FÁCIL

Resolución:

$5x+1<3x+11$ $\quad$ $3x+11<4x+10$

$x<5$ $\quad$ $1<x$

Entonces: $x = 2;3;4$

Suma de valores de $x = 9$

Respuesta: 9

Problema 2

En los conjuntos unitarios

$H = \{q^2+1, 3q-1\}$

$S = \{3x+y, x-y+8\}$

Uno de los valores de $q + x + y$ es:

A) 9 B) 8 C) 7
D) 4 E) 5

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

$q^2+1 = 3q-1$ entonces $q^2-3q+2=0$

$q = 2 ; 1$

$3x+y = x-y+8$ entonces $2x+2y=8$

$x+y=4$

Ahora: $q+x+y=5$

Respuesta: 5

Problema 3

Dados los conjuntos unitarios:

$P = \{x+y, 8\}$

$Q = \{y+z, 10\}$

$S = \{x+z, 12\}$

Calcular: $(x+4y-z)$

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

$x+y=8$

$y+z=10$

$x+z=12$

Sumando:

$x+y+z=15$

Se observa: $x = 5$; $y = 3$; $z = 7$

$x+4y-z=10$

Respuesta: 10

CONJUNTOS II

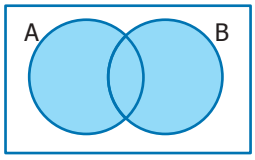
DESARROLLO DEL TEMA

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

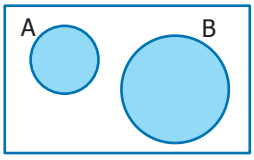
I. UNIÓN O REUNIÓN DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos "A" y "B", se llama reunión de éstos a otro conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto "A" o al conjunto "B" o a ambos.
Así por ejemplo; para:
A = {1; 2; 3} y B = {2; 3; 4; 5}, diremos que el conjuntos formado por {1; 2; 3; 4; 5} donde están todos los elementos de "A" y de "B", se llama reunión de "A" con "B" y se simboliza:
$A \cup B$, y se lee "A unión B".
Notación: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ó } x \in B\}$

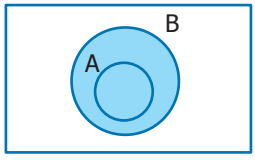
Representación Gráfica



A y B no disjuntos

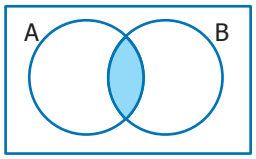


A y B disjuntos

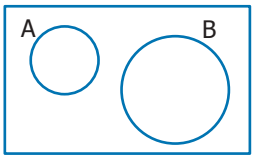


$A \subset B$

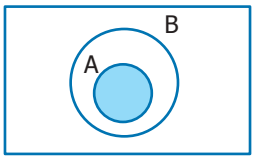
Representación gráfica



A y B no disjuntos



A y B disjuntos



$A \subset B$

Entre la Reunión y la Intersección de dos conjuntos "A" y "B", se pueden establecer las siguientes relaciones:

Propiedad Distributiva:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propiedad Absorción:

$A \cup (A \cap B) = A$, puesto que: $(A \cap B) \subset A$
$A \cap (A \cup B) = A$, puesto que: $A \subset (A \cup B)$

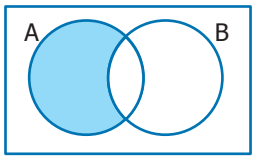
II. INTERSECCIÓN ENTRE CONJUNTOS

La intersección de dos conjuntos cualesquiera "A" y "B" es otro conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a "A" y "B", es decir, está formado por todos los elementos comunes a "A" y "B".
Sean los conjuntos:
A = {1; 2; 3} y B = {2; 3; 4; 5}, observamos que los elementos 2 y 3 son comunes a ambos conjuntos. El conjunto formado por estos elementos, se escribe:
$A \cap B$ y se lee: "A intersección B".
Notación: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$

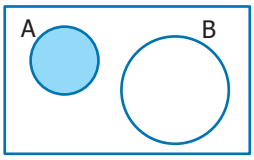
III. DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia de los conjuntos "A" y "B" es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a "A", pero que no pertenecen a "B". Se denota por: A – B, que se lee: "A menos B", ó también "A diferencia B"
Así por ejemplo, sean los conjuntos:
A = {1; 2; 3} y B = {2; 3; 4; 5}
Observamos que el elemento 1 está en el conjunto "A" pero no está en el conjunto "B". Al conjunto formado por 1, se llama diferencia de "A" con "B".
Notación: $A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$

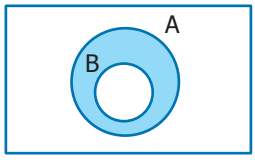
Representación gráfica:



A y B no disjuntos



A y B disjuntos



$B \subset A$

IV. DIFERENCIA SIMÉTRICA DE CONJUNTOS

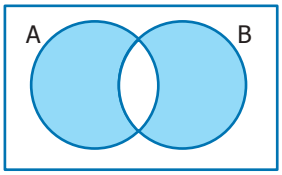
Se denomina diferencia simétrica de "A" y "B" al conjunto formado por la unión de "A - B" con "B - A".

Entonces, en A = {1; 2; 3} y B = {2; 3; 4; 5}, se observa que el elemento 1 pertenece al conjunto "A" pero no pertenece a "B" y los elementos 4 y 5 pertenecen al conjunto "B"; pero no pertenecen al conjunto "A", entonces, al conjunto formado por 1; 4 y 5 se le llama diferencia simétrica de "A" y "B" y se denota por:

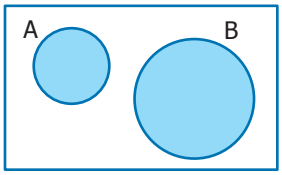
$A \Delta B$.

Notación: $A \Delta B = \{x/x \in (A - B) \cup (B - A)\}$

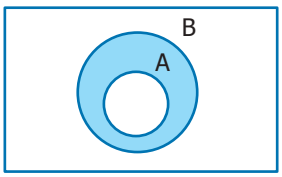
Representación gráfica:



A y B no disjuntos



A y B disjuntos



$A \subset B$

V. COMPLEMENTO ENTRE CONJUNTOS

Sean los conjuntos A = {a, b, c, d, e} y el conjunto B = {a, c, e}, se observa que "B" es subconjunto de "A" y los elementos "b" y "d", pertenecen al conjunto "A" y no pertenecen al conjunto "B". Al conjunto formado por estos elementos: {b, d} se le llama complemento de "B" con respecto a "A" y se denota por: B'

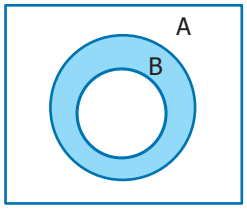
Luego, si "B" está incluido en "A", la diferencia: "A – B" se llama complemento de "B" respecto a "A"

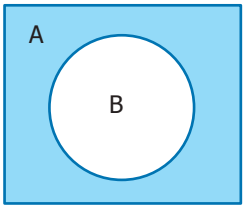
Notación: $B' = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$ ó

$B' = \{x/x \notin B\}$

Observación:
Si el complemento es respecto al conjunto universal y además se tiene:
$B \subset U$, entonces:
$B' = B = C_B = \{x/x \in U \text{ y } x \notin B\} = \{x \in (U - B)\}$

Representación gráfica:





VI. RELACIONES ENTRE LOS CARDINALES DE LOS CONJUNTOS

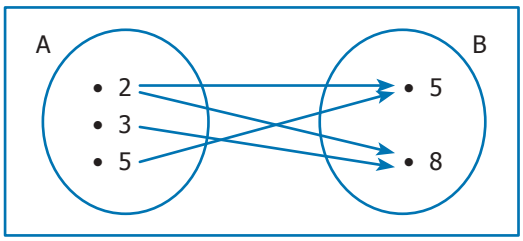
1. Si los conjuntos son disjuntos ($A \cap B = \phi$)
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

2. Si los conjuntos no son disjuntos:
   a) Para dos conjuntos cualesquiera "A" y "B":
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

VII. PRODUCTO CARTESIANO

$A \times B = \{(x; y) / x \in A \wedge y \in B\}$
A y B son conjuntos no vacíos
Ejemplo:
A = {2; 3; 5}
B = {5; 8}
$A \times B = \{(2;5); (2;8); (3;5); (3,8); (5;5); (5;8)\}$

Representación gráfica
Diagrama sagital



Propiedades:
- $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$
- $n(A \times B) = n(B \times A)$
- $A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Dados los conjuntos:

$A = \{x \in N / x \leq 5\}$

$B = \{x \in N / 4 < x \leq 9\}$; x es par

Hallar $A \cup B$

A) {0; 2; 4; 6}
B) {0; 1; 2; 3; 6; 8}
C) {0; 1; 2; 3; 4; 5}
D) {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8}
E) { }

NIVEL FÁCIL

Resolución:

A: $x \leq 5 \Rightarrow A = \{5, 4, 3, 2, 1, 0\}$

Para B: Los valores que toma x son 9, 8, 7, 6, 5 de estos números solo tomamos los números pares.

$\Rightarrow B = \{8; 6\}$

$\Rightarrow$ En consecuencia

$A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$

Respuesta: {0;1;2;3;4;5;6;8}

Problema 2

Dados los conjuntos: $Q = \{2; 4; 6\}$

$R = \{3; 5\}$, hallar $Q - R$

A) {2; 4} B) {4; 6} C) {0; 2; 4}
D) {2; 6; 8} E) {2; 4; 6}

Resolución:

Como ambos conjuntos no tienen elementos comunes

Luego: $Q - R = Q$

$\Rightarrow Q - R = \{2; 4; 6\}$

Respuesta: {2;4;6}

Problema 3

Sean los conjuntos:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$B = \{2; 3; 5\}$

Hallar: $A - B$

A) {1; 4; 6}
B) {2; 4; 6}
C) {4; 5; 6}
D) {3; 5; 6}
E) {2; 4; 5}

Resolución:

Quitando a A lo que aparece en B tendremos:

$A - B = \{1; 4; 6\}$

Respuesta: {1;4;6}

NUMERACIÓN

DESARROLLO DEL TEMA

I. NUMERACIÓN

Es la parte de la aritmética que estudia el número en su formación, representación, propiedades y aplicaciones que con ellas se puede efectuar.

II. NÚMERO

Es un ente abstracto, carente de definición, sin embargo nos da la idea de cantidad.

III. NUMERAL

Es la representación gráfica de los números

IV. REPRESENTACIÓN LITERAL

Es la que se utiliza cuando se desconoce los numerales y para que la representación sea correcta se coloca una barra a lo largo de todo el numeral.

V. SISTEMA DE NUMERACIÓN

Es el conjunto de reglas y principios que rigen la formación, escritura y lectura de los números mediante la adecuada combinación de un grupo de símbolos y palabras.

VI. SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN

Es empleado actualmente, este sistema fue inventado por los hindúes y difundido después por los árabes, razón por la cual se llama sistema indo-arábico. Se utiliza los dígitos:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

La mayor diferencia entre nuestro sistema y el de los romanos radica en que estos no incluían al cero como dígito, lo cual les obligaba a tener un símbolo diferente para cada número que quisieran expresar (por ejemplo de existir el cero, 10 podría expresarse como 10 en lugar de x).

VII. BASE DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

Es aquel número que nos indica la cantidad de unidades de un orden cualquiera para formar una unidad de orden superior.

VIII. CARACTERÍSTICAS DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

- En cualquier sistema de numeración existen tantas cifras como el valor de la base y con las combinaciones de ellas se pueden formar todos los números posibles de dicho sistema.
- El mínimo valor que puede tomar una cifra en cualquier sistema de numeración es el cero (0) y el máximo valor es la unidad menos que el valor de la base.
- La base de un sistema de numeración siempre es un entero positivo mayor que 1.
- Si la primera cifra de un numeral es una letra, necesariamente esta debe ser $\neq$ de 0.
- Todo lo que se encuentra en paréntesis en un numeral representa una sola cifra.

  Sea: $\overline{a(5a)b\,(b+4)(c-3)}$

  $a \neq 0$, el número tiene 5 cifras.

- Se denomina numerales capicúas a aquellos que leídos de izquierda a derecha o de derecha a izquierda se leen iguales.

  88; 959; 5335, $\overline{aba}$, $\overline{cbbc}$
- Toda cifra en el numeral tiene un orden por convención, se enumera de derecha a izquierda.
- Valor relativo de una cifra es aquel que representa la cifra por la posición que ocupa dentro del número.
- Valor absoluto es lo que representa por la forma que tiene.

Tener en cuenta

Base	Nombre del sistema	Cifras utilizadas
2	Binario	0, 1
3	Terciario	0, 1, 2
4	Cuaternario	0, 1, 2, 3
5	Quinario	0, 1, 2, 3, 4
6	Senario	0, 1, 2, 3, 4, 5
7	Heptario	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
8	Octavario	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
9	Nonal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
10	Decimal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
11	Undecimal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
12	Duodecimal	9, 10
.	.	.....
.	.	.....
.	.	.
n	enesimal	.
		.
		.
		0, 1, 2, ... , (n–1)

IX. DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Consiste en expresar al numeral como la adición de los números que resultan a multiplicar cada una de las cifras por la base elevada a la cantidad de cifras que tiene a la derecha la cifra en estudio.

* $4295 = 4 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5$

* $235_7 = 2 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 5$

* $\overline{abcde}_n = a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e$

- **Descomposición en bloque**

  Es un caso particular de la descomposición polinómica en que se toman grupos de cifras (bloques como si fueran una sola cifra).

  - $4242 = 42 \times 10^2 + 42$
  - $35357 = 35_7 \times 7^2 + 35_7$
  - $601601_8 = 601_8 \times 8^3 + 601_8$
  - $\overline{ababab}_n = \overline{ab}_n \cdot n^4 + \overline{ab}_n \cdot n^2 + \overline{ab}_n$

X. TRANSFORMACIÓN DE SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Consiste en transformar un número de cierta forma en un sistema a otro sistema.

Existen tres casos:

A. De Base m a base 10

Se utiliza el procedimiento de descomposición polinómica, efectuando las operaciones indicadas.

Ejemplo:

$\overline{abc}_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$

$456_7 = 4 \times 7^2 + 5 \times 7 + 6$

B. De base 10 a base m

Se utiliza el método de divisiones sucesivas, que consiste en dividir el número dado entre la base "m" a la cual se desea convertir, si el cociente es mayor que "m" se dividirá nuevamente y así en forma sucesiva hasta que se llegue a una división donde el cociente sea menor que 'm'

Luego, se toma el último cociente y los residuos de todas las divisiones, desde el último residuo hacia el primero y ese será el número escrito en base "n".

C. De base m a base n

Se utilizan en este caso, los dos métodos vistos anteriormente, es decir:

1.° Llevamos el número del sistema diferente de 10 a base 10 por descomposición polinómica.

2.° Luego llevamos el número hallado en el sistema decimal a la base que nos piden por divisiones sucesivas.

D. Propiedad

Si el numeral que representa la misma cantidad de unidades simples en dos sistemas de numeración diferentes, deberá cumplirse que donde tenga mayor representación aparente le corresponde una menor base y viceversa.

$$\overset{-}{\overline{abcd}}_n = \overset{+}{\overline{xyzw}}_m$$

Entonces $n > m$

- Numeral de máximas cifras

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)....(n-1)}}_{k \text{ cifras}(n)} = n^k - 1$$

- $$n^{k-1} \leq \underbrace{\overline{abc...x}}_{k \text{ cifras}(n)} < n^k$$

Ejemplo:

$7^{4-1} \leq \overline{abcd}_7 < 7^4$

$4^{5-1} \leq \overline{a0b0c}_4 < 4^5$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Si a y b son dígitos tales que:

$$(a + b)^2 = 144$$

Hallar $\overline{ab} + \overline{ba}$

NIVEL FÁCIL
UNMSM 2000

A) 100
B) 101
C) 132
D) 72
E) 76

Resolución:

De: $(a + b)2 = 144 \Rightarrow a + b = 12$

Donde:

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a$$
$$11(a + b)$$
$$11(12) = 132$$

Respuesta: 132

Problema 2

Si a un número de tres dígitos que empieza en 7 se le suprime este dígito, el número resultante es 1/26 del número original. ¿Cuál es la suma de los tres dígitos de dicho número?

NIVEL FÁCIL
UNMSM 2000

A) 14 B) 15 C) 22
D) 17 E) 11

Resolución:

$$\overline{7ab} \Rightarrow \overline{ab} = \frac{1}{26}(\overline{7ab})$$
$$= \frac{1}{26}(700 + \overline{ab})$$
$$26(\overline{ab}) = 700 + \overline{ab}$$
$$25(\overline{ab}) = 700$$
$$\overline{ab} = 28$$
$$\therefore 7 + a + b = 17$$

Respuesta: 17

Problema 3

Cierto número de dos cifras es n veces la suma de sus cifras; pero al invertir el orden de sus cifras, el nuevo número es k veces la suma de sus cifras. Halla (n+k)

NIVEL INTERMEDIO
UNMSM 2007 - I

A) 14 B) 15 C) 22
D) 17 E) 11

Resolución:

$$\overline{ab} = n(a + b)$$
$$\overline{ba} = k(b + a)$$

$$11(a + b) = (n + k)(a + b)$$
$$\therefore n + k = 11$$

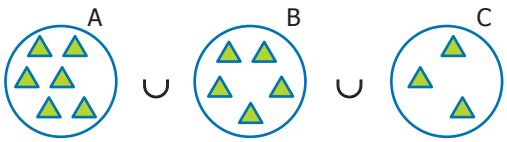
Respuesta: 11

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

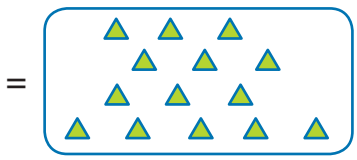
DESARROLLO DEL TEMA

ADICIÓN

Dadas dos o más cantidades sumandos la operación adición consiste en reunir dichas cantidades en una sola llamada suma, la cual tiene tantas unidades como todos los sumandos juntos.



A ∪ B ∪ C



6 triángulos + 5 triángulos + 3 triángulos = 14 triángulos

6 + 5 + 3 = 14

sumandos suma total

I. ADICIÓN EN BASE DIEZ (AGRUPACIÓN DE 10 EN 10)

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} \overset{2\ 2\ 2}{4\,3\,6\,4} \; + \\ 6\,2\,3 \\ 9\,4\,9 \\ 5\,4\,8 \\ \hline 6\,4\,8\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{2\ 2\ 2}{6\,9\,4\,8} \; + \\ 9\,4\,9\,5 \\ 4\,7\,6 \\ 3\,7\,8 \\ \hline 1\,7\,2\,9\,7 \end{array}$$

II. ADICIÓN EN OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Se debe seguir los siguientes pasos:

- Todos los sumandos deben estar en el mismo sistema.
- Al adicionar, si el resultado es igual a la base o excede a esta, se tendrá que agrupar en tantas como indique la base.
- El número de grupos, así formados, serán las unidades a llevar para el siguiente orden y las unidades restantes quedarán en el orden respectivo.

Ejemplos:

1. Hallar la suma de $324_{(5)} + 223_{(5)} + 434_{(5)}$

Resolución:

$$\begin{array}{r} 324_{(5)} \; + \\ 223_{(5)} \\ 434_{(5)} \\ \hline 2014_{(5)} \end{array}$$

Orden	Procedimiento
1.er	4 +3 + 4 = 11 = 2 × 5 + 1 → queda lleva
2.do	2+ (2+2+3) = 9 = 1× 5 + 4 → queda lleva
3.er	1+ (3+2+4) = 10 = 2× 5 + 0 → queda lleva

2.

$$\begin{array}{r} \overset{2\ 2}{4\,3\,4_{(7)}} \; + \\ 6\,2\,3_{(7)} \\ 3\,6\,6_{(7)} \\ \hline 2\,1\,2\,0_{(7)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{1\ 2\ 2}{5\,7\,5\,6_{(8)}} \; + \\ 6\,5\,6_{(8)} \\ 7\,7_{(8)} \\ \hline 6\,7\,3\,3_{(8)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{2+1}{1\,4\,3_{(9)}} \; + \\ 6\,7_{(9)} \\ 2\,8\,1_{(9)} \\ \hline 5\,1\,2_{(9)} \end{array}$$

III. SUMAS NOTABLES

A. Suma de los primeros naturales

$S = 1 + 2 + 3 + ... + n$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

B. Suma de los primeros números pares

$S = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$

$$S = n(n+1)$$

C. Suma de los primeros números impares

$S = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1)$

$$S = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

D. Suma de los cuadrados de los primeros números naturales

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

E. Suma de los cubos de los primeros números naturales

$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

$$S = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

SUSTRACCIÓN

Es una operación inversa a la adición, tal que dados dos números llamados minuendo y sustraendo la operación sustracción hace corresponder un tercer número llamado diferencia, tal que sumando con el sustraendo dé como resultado el minuendo.

Es decir:

M – S = D

donde:

M: minuendo

S: sustraendo

D: diferencia

Propiedades

1. M = S + D
2. M + S + D = 2M

Ejemplos:

Sustracción en base 10

^{1} 4 1 8 –	← minuendo →	^{1} 4 5 0 7 –
2 9 5	← sustraendo →	2 8 4 5
1 2 3	← diferencia →	1 6 6 2

I. SUSTRACCIÓN EN OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Se realiza la operación, orden por orden, de menor a mayor orden. Si la cifra del minuendo fuese menor que la cifra del sustraendo, la cifra correspondiente al orden superior considerando que la unidad prestada del orden superior inmediato equivale a tantas unidades como indica la base.

Ejemplos:

1. Resolver: $423_{(8)} - 256_{(8)}$

Resolución:

$$\begin{array}{r} 4\,2\,3_{(8)} - \\ 2\,5\,6_{(8)} \\ \hline 1\,4\,5_{(8)} \end{array}$$

Orden	Procedimiento
1.er	Como a 3 no se le puede disminuir en 6, lo que se hace es prestar del 2.° orden una unidad, que en el 1.er orden equivale a 8 unidades. $\boxed{8} + 3 - 6 = 5$
2.do	$\boxed{8} + 1 - 5 = 4$
3.er	Se prestó una unidad y quedan 3. Luego 3 – 2 = 1

2. $^{1\ 1}$
$4\,3\,2\,4_{(8)} -$
$1\,4\,3\,2_{(8)}$
$2\,6\,7\,2_{(8)}$

3. $^{1\ 1\ 1}$
$3\,4\,1\,0_{(7)} -$
$2\,4\,5\,3_{(7)}$
$6\,2\,4_{(7)}$

Propiedad

Si a > c, además: $\overline{abc}_{(k)} - \overline{cba}_{(k)} = \overline{mnp}_{(k)}$

se cumple: m + p = k – 1; n = k – 1; a – c = m+1

II. COMPLEMENTO ARITMÉTICO (CA)

El complemento aritmético de un número entero positivo es igual a la cantidad de unidades que le falta a dicho número para ser igual a una unidad del orden inmediato superior a su cifra de mayor orden.

Ejemplos:

- $CA(3) = 10^1 - 3 = 7$
- $CA(28) = 10^2 - 28 = 72$
- $CA(730) = 10^3 - 730 = 270$
- $CA(6340) = 10^4 - 6340 = 3660$

En otras bases:

- $CA(53_{(8)}) = 8^2 - 53_{(8)}$
- $CA(213_{(7)}) = 7^3 - 213_{(7)}$
- $CA(43\ 001_{(8)}) = 8^5 - 43\ 001_{(8)}$

En general:

Si $N = \underbrace{\overline{abc...x}}_{\text{k cifras}}{}_{(n)} \Rightarrow CA(N) = \underbrace{100...0}_{\text{k ceros}}{}_{(n)} - N$

Forma práctica

Para obtener el CA de un numeral a la última cifra significativa se le resta de la base y a las anteriores se le resta de la base menos uno. Si terminan en cifras ceros estos se mantienen.

$$CA(\overline{abcd}) = \overline{(9-a)(9-b)(10-d)}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Con 3 dígitos distintos y no nulos se forman todos los números posibles de dos cifras diferentes ¿Cuál es la razón entre la suma de todos estos números de dos cifras y la suma de los 3 dígitos?

A) 22 B) 26 C) 28
D) 24 E) 20

UNMSM 2009–I
NIVEL INTERMEDIO

Resolución

Sean los dígitos distintos y no nulos: a, b y c. Se pueden formar los números de dos cifras diferentes:

$$\overline{ab};\ \overline{ac};\ \overline{ba};\ \overline{bc};\ \overline{ca};\ \overline{cb}$$

Sea la suma:

$\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{bc}+\overline{ca}+\overline{cb} = 22(a+b+c)$ (mediante su descomposición polinómica).

Sea la suma de los 3 dígitos: $a + b + c$

Luego, la razón pedida será:

$$\frac{22(a+b+c)}{a+b+c} = 22$$

Respuesta: A) 22

Problema 2

Sea $x = \overline{abc}$ un número representado en forma decimal, donde a>c, entonces $(\overline{abc} - \overline{cba})$ tiene como cifra intermedia a:

A) 5 B) 9 C) 1
D) 7 E) 0

UNMSM 2004–I
NIVEL FÁCIL

Resolución

Por propiedad: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz}$

entonces:

$$x + z = 9;\ y = 9$$

Entonces la cifra central es 9.

Respuesta: B) 9

Problema 3

Calcular el valor de la expresión: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = \overline{xyz}$, si se sabe que $(a+b+c)^2 = 2\ 025$

A) 4895 B) 4905
C) 4695 D) 4995
E) 4805

UNMSM 2001
NIVEL INTERMEDIO

Resolución

Del dato: $(a + b + c)^2 = 2\ 025$

se obtiene que: $a + b + c = 45$

Luego, colocando un sumando bajo otro:

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ \overline{bca} \\ \overline{cab} \\ \hline \overline{4995} \end{array} +$$

Observación:

Lo mostrado nos da la solución del ejercicio, sin embargo, lo real es que el ejercicio tiene un dato absurdo: la operación se realiza en base 10 y la suma: $a + b + c = 45$ es imposible, dado que las cifras toman un valor máximo de 9, siendo la suma máxima 27 y no puede ser 45.

Respuesta: D) 4 995

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

DESARROLLO DEL TEMA

I. MULTIPLICACIÓN

Es la operación binaria que hace corresponder a cada par ordenado de enteros.
Sabemos:

$$M \times m = P$$

donde:

M = Multiplicando
m = Multiplicador
P = Producto

si:

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \times \\ \overline{xy} \\ \hline y(\overline{abc}) \rightarrow \text{Primer producto parcial} \\ x(\overline{abc}) \rightarrow \text{Primer producto parcial} \\ \hline \text{Producto total} \end{array}$$

II. DIVISIÓN

Es la operación binaria que hace corresponder a cada par ordenado de enteros cuyas componentes se denominan dividendo y divisor, y un tercer número (no necesariamente entero) llamado cociente.
Algoritmo general de la división:

$$D = d \cdot q + r$$

donde:

D = Dividendo
d = Divisor
q = Cociente
r = Residuo

siendo:

D; d; q; r $\in \mathbb{Z}^+$ (división entera)

III. TIPOS DE DIVISIÓN

A. División entera exacta

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ r=0 & q \end{array} \qquad D = d.q$$

Observación: r = 0

B. División entera inexacta

(Si los divisores son positivos)

- **D.E.I. por defecto**

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ r_d & q_d \end{array} \qquad D = d \cdot q_d + r_d$$

$0 < r_d < d$,
además q_d = cociente por defecto

- **D.E.I. por exceso**

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ r_e & q+1 \end{array} \qquad D = d \cdot q_e - r_e$$

$0 < r_e < d$,
además (q+1) = cociente por exceso (q_e)

Propiedades

a. Suma de residuos:

$$r_d + r_e = d$$

b. Restos máximo y mínimo:

$(r_d; r_e)_{min} = 1$

$(r_d; r_e)_{máx} = d - 1$

c. $q_e = q_d + 1$

d. En una división entera:

Si el dividendo y divisor quedan multiplicados por un número entero, entonces el residuo queda también multiplicado por el mismo entero, sin que se altere el cociente.

$$D.n = (d.n)q + r.n$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Si se aumenta 10 a los dos factores de un producto este quedará aumentado en 1100. ¿Cuál será dicho producto si la diferencia de los factores es 20?

A) 4800 B) 3500
C) 2400 D) 1500
E) 6300

Resolución

Sea el producto inicial

$a \times b = p$

por dato:

$(a + 10)(b + 10) = p + 1100$

$\rightarrow a + b = 100$ ..... (1)

además:

$a - b = 20$ ..... (2)

resolviendo:

$a = 60, b = 40$

en (1)

$a \times b = 2400$

$\therefore$ El producto es 2400

Respuesta: C) 2400

Problema 2

Hallar el mayor número que al ser dividido por 50 se obtiene un resto que es el triple del cociente.

A) 343 B) 146
C) 488 D) 848
E) 180

Resolución

Sea N el mayor número tal que:

$\begin{array}{r|l} N & 50 \\ r & q \end{array}$ por propiedad

$r < 50$

$\downarrow$

$3q < 50$

$q < 16,\widehat{6}$

luego:

$N = 50q + r$

$N = 53q$

Como N es el mayor entonces q también debe ser el mayor.

$\rightarrow N = 53(16) = 848$

$\therefore$ El mayor número es 848

Respuesta: D) 848

Problema 3

La suma de dos números es 323. Al dividir el mayor de los números por el otro, se tiene 16 de cociente y residuo máximo. El número mayor es:

A) 302 B) 234 C) 305
D) 304 E) 243

Resolución:

Sea los números a y b (a > b), por dato:

$\begin{array}{r|l} a & b \\ r_{max} & 16 \end{array}$ por propiedad

$r_{max} < b - 1$

luego:

$a = 16b + r_{max}$

$a = 17b - 1$ ..... (1)

además

$a + b = 323$

$\downarrow$

$(17b - 1) + b = 323$

$b = 18$

$a = 305$

$\therefore$ El número mayor es 305

Respuesta: C) 305

Pamer ACADEMIAS

DIVISIBILIDAD I

DESARROLLO DEL TEMA

I. DIVISIBILIDAD

Se dice que un número entero "A" es divisible entre otro número entero positivo "B" (módulo) cuando la división entera de "A" entre "B" es exacta.

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & k \end{array} \qquad A \wedge k \in \mathbb{Z} \qquad B \in \mathbb{Z}^+$$

II. MULTIPLICIDAD

Un número entero A es múltiplo de otro entero "B", si: A = B x k; donde "k" es un número entero cualquiera $k \in \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Conceptos equivalentes:

$A = \overset{\circ}{B}$ ⟨ "A" es divisible entre "B"; "A" es múltiplo de "B"; "B" es divisor de "A"; "B" dividir a "A"; "B" es factor de "A"

III. NOTACIÓN

- Si A es múltiplo de B.
  Entonces: $A = B$ o $A = BK$
- Si A no es múltiplo de B.
  Entonces $A \neq B$ o $A = BK \pm r$

IV. CONSIDERACIONES IMPORTANTES

- El cero (0) es múltiplo de todo número entero positivo.
- Todo número entero positivo es múltiplo de sí mismo.
- La unidad es divisor de todo número entero.
- El divisor es un número entero positivo (módulo)

V. PRINCIPIOS OPERATIVOS

- Sobre la suma y la resta de múltiplos.
  $\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$
  $\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$
- Sobre la multiplicación de un número cualquiera con un múltiplo cualquiera.
  $\overset{\circ}{n} \times k = \overset{\circ}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$
- Sobre la potencia de un múltiplo cualquiera
  $(\overset{\circ}{n})^k = \overset{\circ}{n} \quad k \in \mathbb{Z}^+$
- $(\overset{\circ}{a} + m)(\overset{\circ}{a} + n) = \overset{\circ}{a} + m.n$
- Sobre la división de múltiplos
  $\frac{\overset{\circ}{A}}{\overset{\circ}{A}}$ = no se puede anticipar al resultado.
- Sobre si es múltiplo de varios módulos
  $N = \overset{\circ}{a}$
  $N = \overset{\circ}{b}$
  $\Rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{M.C.M.(a; b)}}$
- Sobre si es múltiplo de varios módulos y un mismo resto
  $N = \overset{\circ}{a} + R$
  $N = \overset{\circ}{b} + R$
  $\Rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{M.C.M.(a; b)}} + R$

VI. BINOMIO DE NEWTON

Es el desarrollo del binomio, aplicándose los criterios de divisibilidad y permite hallar el residuo de manera inmediata.

$(\overset{\circ}{A} + B)^n = \overset{\circ}{A} + B^n$; $n \in \mathbb{Z}^+$

$(\overset{\circ}{A} - B)^n = \begin{cases} \overset{\circ}{A} + B^n & \text{(si "n" es par)} \\ \overset{\circ}{A} - B^n & \text{(si "n" es impar)} \end{cases}$

VII. PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Sean dos números enteros A y B diferentes de cero.

Si: $a \times b = \overset{\circ}{n} \Rightarrow a = \overset{\circ}{n} \vee b = \overset{\circ}{n}$

Propiedad

$$(\text{IMPAR})^{\text{PAR}} = \overset{\circ}{8} + 1$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Si: A = 3k + 1; B = 3k + 2
halle el residuo que deja la expresión:
$E = [2^A + 2^{2B} + 2^3]$ entre 7

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 4

NIVEL FÁCIL

Resolución:

$E = (2^A + 2^{2B} + 8) \div 7$

$E = (2^{3k+1} + 2^{6k+4} + \overset{\circ}{7} + 1)$

$E = (2^3)^k \times 2^1 + (2^3)^{2k} \times 2^4 + 1$

$E = (\overset{\circ}{7}+1)2 + (\overset{\circ}{7}+1) \times (\overset{\circ}{7}+2)+1$

$E = 2 + 2 + 1 + \overset{\circ}{7}$

$E = \overset{\circ}{7} + 5 \rightarrow$ residuo = 5

Respuesta: 5

Problema 2

Una importadora ha comprado relojes a S/.143 c/u, lapiceros a S/.91 c/u; pulseras a S/.77 c/u. Si la factura total fue S/.2213, halle el número de relojes.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

NIVEL FÁCIL

Resolución:

Planteando el enunciado:
"a" # de relojes
$143 \times a + 91 \times b + 77 \times c = 2\ 2\ 1\ 3$

$1\ 2\ 3\ 1$

$(-1)\ \ +1$

Módulo de $\overset{\circ}{7}$:

$[(\overset{\circ}{7} + 3)a + \overset{\circ}{7} + \overset{\circ}{7}] = 3 + \cancel{3} + \cancel{4} - 2$

$3a + \overset{\circ}{7} = 7 + 1$

$a = \dfrac{7m+1}{3}$

$m = 2\ ;\ a = 5$

Respuesta: 5

Problema 3

¿Cuál es el residuo de dividir:
$\underbrace{666...666}_{102\ \text{cifras}}{}_{(8)}$ entre 13?

A) 2 B) 8
C) 3 D) 5
E) 9

NIVEL FÁCIL

Resolución:

Calculando restos potenciales de base 8 respecto al módulo 13.
Base 8: $8^0; 8^1; 8^2; 8^4; 8^4$
1; 8; 12; 5; 1
1; –5; –1; 5; 1

Cada 4 cifras se anula:

102 | 4
(2) 25

$6\ 6\ 6\ .....\ 6\ 6\ 6_{(8)}$

$\downarrow\downarrow$ (100 cifras)

$-5\ 1\ \ 100\ \text{cifras} = 0$

$\Rightarrow \quad -30 + 6 = \overset{\circ}{13} + r$

$\overset{\circ}{13} + 2 = \overset{\circ}{13} + r$

$\therefore r = 2$

Respuesta: 2

DIVISIBILIDAD II

DESARROLLO DEL TEMA

I. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Llamamos Criterios de Divisibilidad a ciertas reglas prácticas que aplicadas a las cifras de un numeral permitirán determinar su divisibilidad respecto a cierto módulo.

A. Criterios de divisibilidad entre potencias de 2

- Un numeral es divisible entre $2(2^1)$ si y solo sí su última cifra es par.
- Un numeral es divisible entre $4(2^2)$ si y solo sí el numeral formado por sus 2 últimas cifras es divisible entre 4.
- Un numeral es divisible entre $8(2^3)$ si y solo si el numeral formado por sus 3 últimas cifras es divisible entre 8.

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{2} \rightarrow e = \overset{\circ}{2}$

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{4} \rightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{4}$

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{8} \rightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{8}$

B. Criterios de divisibilidad entre 3 ó 9

Un numeral es divisible entre 3 (o entre 9) si y solo si la suma de sus cifras es divisible entre 3 (o entre 9)

$\overline{abcd} = \overset{\circ}{3} \rightarrow a + b + c + d = \overset{\circ}{3}$

$\overline{abcd} = \overset{\circ}{9} \rightarrow a + b + c + d = \overset{\circ}{9}$

C. Criterios de divisibilidad entre potencias de 5

- Un numeral es divisible entre 5 si y solo sí su última cifra es 0 ó 5.
- Un numeral es divisible entre 25 si y solo si su última cifra es el numeral formado por sus 2 últimas cifras es divisible entre 25.
- Un numeral es divisible entre 125 si y solo sí el numeral formado por sus 3 últimas cifras es divisible entre 125.

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{5} \rightarrow e = 0 \text{ ó } \overset{\circ}{5}$

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{25} \rightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{25}$

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{125} \rightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{125}$

D. Criterios de divisibilidad entre 11

Un numeral es divisible entre 11 si y sólo si la diferencia entre la suma de sus cifras de orden impar y la suma de sus cifras de orden par es divisible entre 11.

$\overline{a\,b\,c\,d\,e} = \overset{\circ}{11}$

$+ - + - +$

$(a + c + e) - (b + d) = \overset{\circ}{11}$

E. Criterios de divisibilidad entre 7

Un numeral es divisible entre 7 si al multiplicar a cada una de sus cifras (a partir de la derecha) por 1, 3, 2, −1, −3, −2, 1, 3, … y luego efectuar, la suma algebraica resultante es divisible entre 7.

$1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3\ 1$

$\overline{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g} \rightarrow a - 2b - 3c - d + 2e + 3f + g = \overset{\circ}{7}$

$+\ \ -\ \ +$

F. Criterios de divisibilidad entre 13

Un numeral es divisible entre 13 y si al multiplicar a cada una de sus cifras (a partir de la derecha) 1, −3, −4, −1, 3, 4, 1, −3, −4, … y luego efectuar, la suma algebraica resultante es divisible entre 13.

$1\ 4\ 3\ 1\ 4\ 3\ 1$

$\overline{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g}$

$+\ \ -\ \ +$

$a + 4b + 3c - d - 4e - 3f + g = \overset{\circ}{13}$

G. Divisibilidad compuesta

Si N es divisible por A y B, lo será por su producto, siempre que A y B tengan como único divisor en común la unidad.

Si: $N = \overset{\circ}{12} \Rightarrow N = \overset{\circ}{4}$ y $N = \overset{\circ}{3}$, 4 y 3 tienen como único divisor a 1.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Calcular el valor de «x» sabiendo que $\overline{67 \times 414}$ es divisible entre 9.

A) 5
B) 2
C) 6
D) 9
E) 4

NIVEL FÁCIL

Resolución:

$\overline{67 \times 414} = \overset{\circ}{9}$

Entonces: $6 + 7 + x + 4 + 1 + 4 = \overset{\circ}{9}$

$22 + x = \overset{\circ}{9}$

$x = 5$

Respuesta: A) 5

Problema 2

Cuál es el valor de la suma de los valores que deben reemplazar a «M» y «N» en el numeral $\overline{87653MN}$ para que sea divisible entre 125?

A) 15
B) 12
C) 16
D) 13
E) 14

NIVEL FÁCIL

Resolución

$\overline{87653MN} = \overset{\circ}{125}$

Como $125 = 5^3$ $\overline{3MN} = \overset{\circ}{125} = 375$

Luego: M = 7 ; N = 5

Respuesta: B) 12

Problema 3

¿Cuál es el valor que debe tomar "y" para que el numeral $\overline{14y17}$ sea divisible entre 11?

A) 7
B) 4
C) 5
D) 9
E) 8

NIVEL FÁCIL

Resolución

$\overline{14y17} = \overset{\circ}{11}$

$+ - + - +$

Entonces:

$1 - 4 + y - 1 + 7 = \overset{\circ}{11}$

$3 + y = \overset{\circ}{11}$

$y = 8$

Respuesta: E) 8

NÚMEROS PRIMOS

DESARROLLO DEL TEMA

I. CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

Los números enteros positivos se pueden clasificar según la cantidad de divisores enteros y positivos que tiene.

A. Número simple

Si tienen a lo más dos divisores

La Unidad.- Es el único número que tiene un solo divisor, el mismo

Primos Absolutos (Número Primo).- Si tiene dos divisores, la unidad y el mismo número 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; .....

B. Número compuesto

Si tiene más de dos divisores 4; 6; 8; 9; .....

Los Números Primos Entre Sí (PESI)

Dos o más números enteros son P.E.S.I. cuando su único divisor común es la unidad. Así por ejemplo 8 y 15 son P.E.S.I. porque:

$D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$

$D_{15} = \{1; 3; 5; 15\}$

$D_8 \cap D_{15} = \{1\}$

II. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

(Descomposición Canónica)

Todo número entero positivo mayor a uno, es posible expresarlo como un producto de potencias de sus divisores primos diferentes. Dicha representación es única.

Ejemplo: $24 = 2^3 \times 3^1$ (Descomposición canónica)
(Descomposición Canónica)

Sea: $N = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}$ un número descompuesto canónicamente donde a, b y c son primos y x, y, z son enteros positivos

A. Cantidad de Divisores ($CD_{(N)}$)

$$CD_{(N)} = (x + 1)(y + 1)(z + 1)$$

B. Suma de los Divisores ($SD_{(N)}$)

$$SD_{(N)} = \frac{a^{x+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{y+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{z+1} - 1}{c - 1}$$

C. Producto de los Divisores($PD_{(N)}$)

$$PD_{(N)} = \sqrt{N^{CD_{(N)}}}$$

D. Suma de las Inversas de los Divisores($SID_{(N)}$)

$$SID_{(N)} = \frac{SD_{(N)}}{N}$$

III. ESTUDIO DE LOS DIVISORES ENTEROS POSITIVOS DE UN NÚMERO

Observación:

$$24 = \overbrace{\underbrace{1;\ \underbrace{2;3}_{\text{divisores primos}}}_{\text{divisores simples}};\ \underbrace{4;6;8;12;24}_{\text{divisores compuestos}}}^{\text{Divisores } z^+}$$

$$24 = \overbrace{1;\ 2;3;4;6;8;12;24}^{\text{Divisores } z^+}$$

divisores propios

- $C_{D(N)} = C_{D(SIMPLES)} + C_{D(COMPUESTOS)}$
- $C_{D(N)} = C_{D(PRIMOS)} + C_{D(COMPUESTOS)} + 1$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Halle el valor de "n" si se sabe que el número $(189)^n$ tiene 133 divisores.

A) 14 B) 15
C) 16 D) 13
E) 12

UNMSM 2005 - I
NIVEL FÁCIL

Resolución:

$(189)^n = (3^3 \times 7)^n = 3^{3n} \times 7^n$

Dato:

$(3n+1)(n+1) = 133$

$\therefore n = 16$

Respuesta: C) 16

Problema 2

Si M es la suma de los divisores positivos de 48, entonces $\sqrt[3]{M+1}$ es:

A) 3 B) 5
C) 6 D) 7
E) 8

UNMSM 2005 - II
NIVEL FÁCIL

Resolución:

$48 = 2^4 \times 3^1$

$M = \frac{2^5-1}{2-1} \times \frac{3^2-1}{3-1} = 124$

De:

$\sqrt[3]{M+1} = \sqrt[3]{24+1} = 5$

Respuesta: B) 5

Problema 3

Si el número $M = 3^2 \times 10^n$ tiene 48 divisores positivos, entonces el valor de "n" es:

A) 2 B) 1
C) 4 D) 5
E) 3

UNMSM 2008 - II
NIVEL FÁCIL

Resolución:

$M = 3^2 \times 2^n \times 5^n$

De:

$48 = 3(n+1)^2$

$\therefore n = 3$

Respuesta: E) 3

MCD – MCM

DESARROLLO DEL TEMA

I. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

El máximo común divisor de dos o más números enteros positivos es aquel número entero positivo que cumple las siguientes condiciones:

I. Está contenido en todos ellos (divisor de ellos).
II. Es el mayor posible.

Ejemplo:

Para los números: 12 y 18
Div. de 12 = {1; 2; 3; 4; 6; 12}
Div. de 18 = {1; 2; 3; 6; 9; 18}
Los divisores comunes son: 1; 2; 3 y 6
El mayor de dichos divisores es 6
$\Rightarrow$ MCD (12; 18) = 6

Observa que los divisores comunes a 12 y 18 son los divisores de su M.C.D.

Procedimientos de cálculo para el M.C.D.

a. Por descomposición en factores primos (descomposición canónica).

Ejemplo:

Calcular el MCD de 360 y 300
En primer lugar descomponemos canónicamente cada número:
$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

> Luego el MCD es el producto de los factores primos **comunes** elevados a su menor exponente.

$\Rightarrow$ MCD (360; 300) = $2^2 \times 3 \times 5 = 60$

II. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M.)

El M.C.M. de varios números enteros positivos es aquel número entero positivo que cumple dos condiciones:

I. Contiene a todos ellos exactamente (múltiplo de ellos).
II. Es el menor posible.

Ejemplo:

Para los números: 4 y 6
Mult. (+) de 4 = {4; 8; 12; 16; 20; 24; ...}
Mult. (+) de 6 = {6; 12; 18; 24; 30; ...}
Los múltiplos comunes son: 12; 24; ... etc.
El menor de los múltiplos comunes es 12
$\Rightarrow$ M.C.M. (4 ; 6) = 12
Observa que los múltiplos comunes son múltiplos de su M.C.M.

Procedimientos de cálculo para el M.C.M.

a. Por descomposición en factores primos (descomposición canónica).

Ejemplo:

Calcular el MCM de los números: 80; 180 y 150
En primer lugar descomponemos canónicamente cada número:
$80 = 2^4 \times 5$
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
$150 = 2 \times 3 \times 5^2$

> Luego el MCM es el producto de factores **primos comunes y no comunes** elevados a su mayor exponente.

MCM (80; 180; 150) = $24 \times 32 \times 52 = 3\,600$

Propiedades relativas al M.C.D. y al M.C.M.

1. Si se tiene dos números "A" y "B" primos entre sí (PESI)

$\Rightarrow$ M.C.D. (A y B) = 1
M.C.M. (A y B) = A × B

2. Si el M.C.D. (A; B; C) = K

$\Rightarrow$ M.C.D. (nA ; nB ; nC) = nK

M.C.D. $\left(\frac{A}{n}; \frac{B}{n}; \frac{C}{n}\right) = \frac{k}{n}$

3. Si el M.C.M. (A; B; C) = m

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{M.C.M. } (nA\ ;\ nB\ ;\ nC) = nm \\ \text{M.C.M. } \left(\frac{A}{n};\frac{B}{n};\frac{C}{n}\right) = \frac{m}{n}\end{array}}$$

4. Los cocientes de dividir a varios números enteros por su respectivo M.C.D. son PESI.

Si: M.C.D. (A ; B ; C) = K

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A}{K} = p \\ \frac{B}{K} = q \\ \frac{C}{K} = r\end{array}\right\} \text{primos entre sí (PESI)}$$

De donde se deduce que:

A = K.p B = K.q y C = K.r

5. Los cocientes de dividir el M.C.M. de varios números entre cada uno de ellos son PESI

Si: M.C.M. (A ; B ; C) = m

$$\left.\begin{array}{l}\frac{m}{A} = p \\ \frac{m}{B} = q \\ \frac{m}{C} = r\end{array}\right\} \text{PESI}$$

6. Propiedad solo para dos números:
El producto de dos números es igual al producto de su M.C.D. y su M.C.M.
Si:
M.C.D. (A ; B) = K

$$\Rightarrow A \times B = K \times m$$

M.C.M. (A ; B) = m

Divisiones sucesivas o algoritmo de Euclides

Solo permite el cálculo del MCD de dos números
En general: sean los números A y B donde A > B

	q_1	q_2	q_3	q_1	← cocientes
A	B	r_1	r_2	r_3	← MCD
	r_1	r_2	r_3	0	← residuos

MCD(A;B) = r_3

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

El MCM de dos números es 30 030 y su MCD es 5. ¿Cuántos pares de números hay con esta propiedad?

A) 8 B) 16
C) 32 D) 64
E) 60

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

Sean A y B los números, entonces el MCD (A, B) = 5
Los números A y B se podrán escribir como:
A = 5 p y B = 5 q; donde p y q son números primos entre sí.

Aplicando la propiedad:
A × B = MCD (A, B) × MCM (A, B)

(5p) × (5q) = 5 × 30030

Entonces: p . q = 2 × 3 × 7 × 11 × 13

La cantidad de pares de valores enteros distintos será:

$$\#\text{ de pares} = \frac{\#\text{ de divisores de su producto}}{2}$$

$$= \frac{(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)}{2}$$

de pares = 16

Observación: Solo se cumple cuando en la descomposición canónica tiene exponentes uno.

Respuesta: B) 16

Problema 2

Si:

MCD (3 A; 24 C) = 18 N y MCD (2 C; B) = 2N

Calcule "N" si:

MCD (A; 4 B; 8 C) = 21 000
A) 10 500 B) 21 000
C) 13 500 D) 12 200
E) 12 400

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

MCD (3 A; 24 C) = 18 N

- MCD (A; 8 C) = 6 N ... (α)
  MCD (2 C; B) = 2 N
- MCD (8 C; 4 B) = 8 N ... (β)

De (α) y (β)

MCD(A;4B;8C) = MCD(6N,8N) = 2 N

En el cual intervienen los tres números y nos piden:
MCD (A; 4B; 8C) = 21 000 = 2 N
N = 10 500

Respuesta: A) 10 500

Problema 3

Determinar dos números de tres cifras, cuya suma es 432 y su MCM es 323 veces su MCD. Dar como respuesta la diferencia de dichos números.

A) 12 B) 18
C) 24 D) 36
E) 42

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

A + B = 542

mcm(A; B) = 323 × MCD (A, B)

$$\frac{mcm\ (A, B)}{MCD\ (A, B)} = 323 = 17 \times 19$$

Pesi

A = MCD × 17

B = MCD × 19

MCD × (17 + 19) = 432

$$MCD = \frac{432}{36} = 12$$

B – A = (MCD)

B – A = 2 × 12 = 24

Respuesta: C) 24

Pamer ACADEMIAS

RACIONALES I

DESARROLLO DEL TEMA

I. DEFINICIÓN

Se llama número racional a todo número que puede representarse como el cociente de 2 enteros con denominador distinto de cero

II. CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

- Consideramos las parejas de números enteros (a;b) donde $b \neq 0$.
- Se denota (a;b). A a se le llama numerador y a **b** se le llama denominador.
- Al conjunto de estos números (conjunto de los racionales) se les denota por Q. Es decir:
  $Q = \{\frac{a}{b} / a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

III. NÚMEROS FRACCIONARIOS

Son aquellos números racionales que no son enteros.

Ejemplos: $\frac{5}{7}; \frac{3}{12}; \frac{15}{-4}; \frac{-7}{-8}$

A. Fracción

Son aquellos números fraccionarios, cuyos términos son positivos.

Ejemplos: $\frac{12}{13}; \frac{9}{4}; \frac{121}{41}; \frac{8}{3}$

$$\boxed{f = \frac{a \rightarrow \text{numerador}}{b \rightarrow \text{denominador}}}$$

"f" es fracción $\Leftrightarrow a \neq b, a \in Z^+; b \in Z^+$

B. Clasificación de las fracciones

1. Por la comparación de su valor respecto de la unidad

* **Propia:**

Cuando es menor que la unidad.

$$\boxed{f = \frac{a}{b} < 1; a < b}$$

Ejemplos: $\frac{7}{12}; \frac{5}{31}; \frac{1}{9}$

* **Impropia:**

Cuando es mayor que la unidad.

$$\boxed{f = \frac{a}{b} > 1; a > b}$$

Ejemplos: $\frac{17}{4}; \frac{9}{5}; \frac{231}{64}$

Nota:

- Toda fracción impropia se puede expresar como una fracción mixta, es decir, como una parte entera más una fracción propia.
- Expresar como fracción mixta a: $\frac{9}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \hline 1 & 4 \end{array} \Rightarrow \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

2. Por su denominador

* **Decimal:**

Cuando el denominador es una potencia de 10.

$$\boxed{f = \frac{a}{b}; b = 10^n; n \in Z^+}$$

Ejemplo: $\frac{7}{100}; \frac{3}{100}; \frac{170}{10000}$

* **Ordinaria o común:**

Cuando el denominador no es una potencia de 10.

$$\boxed{f = \frac{a}{b}; b \neq 10^n; n \in Z^+}$$

Ejemplo: $\frac{7}{3}; \frac{18}{31}; \frac{72}{86}$

3. Por la cantidad de divisores comunes de sus términos

* **Irreductible:**

Cuando sus términos sólo poseen como divisor común a la unidad.

$$\boxed{f = \frac{a}{b}; \text{ a y b son PESI, MCD(a, b) = 1}}$$

Ejemplos: $\frac{8}{7}; \frac{15}{49}; \frac{13}{24}$

* **Reductible:**
Cuando sus términos tienen más de un divisor común.

$f = \frac{a}{b}$; a y b son PESI, MCD(a, b) ≠ 1

4. Por grupo de fracciones

* **Homogéneas:**
Todos los denominadores son iguales.
Ejemplos: $\frac{8}{15}; \frac{9}{15}; \frac{41}{15}$

* **Heterogéneas:**
Por lo menos hay un denominador diferente a los demás.
Ejemplos: $\frac{18}{5}; \frac{6}{15}; \frac{9}{16}; \frac{4}{3}$

C. Propiedades

1. Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ fracciones irreductibles.

2. Dadas las fracciones irreductibles:
$\frac{a}{m}; \frac{b}{n}; \frac{c}{p}$
Se cumple que:

$$MCD\left(\frac{a}{m}; \frac{b}{n}; \frac{c}{p}\right) = \frac{MCD(a, b, c)}{MCM(m, n, p)}$$

$$MCM\left(\frac{a}{m}; \frac{b}{n}; \frac{c}{p}\right) = \frac{MCM(a, b, c)}{MCD(m, n, p)}$$

Ejemplos:

$$MCD\left(\frac{18}{11}; \frac{45}{4}; \frac{27}{22}\right) = \frac{MCD(18, 45, 27)}{MCM(11, 4, 22)} = \frac{9}{44}$$

$$MCM\left(\frac{9}{20}; \frac{21}{32}; \frac{7}{44}\right) = \frac{MCM(9, 21, 7)}{MCC(20, 32, 44)} = \frac{63}{4}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1
Si se quita 4 al denominador de una fracción cuyo numerador es 3; la fracción aumenta en una unidad. ¿Cuál es la fracción?
A) 3/4
B) 3/7
C) 3/5
D) 3/8
E) 3/6

Resolución:

Sea: $f = \frac{3}{D}$

De: $\frac{3}{D-4} = \frac{3}{D} + 1$

$$3\left(\frac{1}{D-4} - \frac{1}{D}\right) = 1$$

$$\frac{4}{(D-4)D} = \frac{1}{3}$$

$$12 = D(D-4)$$
$$D = 6$$

$\therefore f = \frac{3}{6}$

Respuesta: 3/6

Problema 2
El número de fracciones irreductibles con denominador 28; mayor que 1/9 pero menor que 3/4 es:
A) 14 B) 8
C) 17 D) 9
E) 7

Resolución:

De: $\frac{1}{9} < \frac{N}{28} < \frac{3}{4}$

$3{,}1 < N \wedge N < 21$
$N = 4; 5; 6; 7; \ldots ; 20$

$\therefore$ Hay 17 fracciones

Respuesta: 17

Problema 3
Qué fracción hay que adicionar a 2/11 para que sea igual a los 2/3 de los 5/7 de los 4/9 de los 6/11 de 9.
A) 4/9
B) 5/7
C) 2/9
D) 6/7
E) 3/11

Resolución:

$$\frac{2}{11} + f = \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{9} \times \frac{6}{11} \times 9$$

$$\frac{2}{11} + f = \frac{80}{77}$$

$\therefore f = \frac{6}{7}$

Respuesta: 6/7

RACIONALES II

DESARROLLO DEL TEMA

I. NÚMEROS DECIMALES

A. Número Decimal

Es una expresión en forma lineal de una fracción; la cual posee una parte entera y otra parte no entera, separados por una coma:

$$\underbrace{24}_{\text{Parte entera}} , \underbrace{7531}_{\text{Parte no entera}}$$

Coma decimal

B. Clasificación de los números decimales

1. Decimal exacto

Presenta un número limitado de cifras en la parte no entera.

Ejemplo: 0,14 0,3152 32,005

Observaciones::

- Una fracción propia irreductible, dará origen a un decimal exacto; cuando el denominador es una potencia de 2 de 5 o del producto de potencias de 2 y 5 únicamente.
- La cantidad de cifras decimales está dada por el mayor exponente de 2 ó 5 contenido en el denominador de la fracción irreductible.
  Ejemplo: Las siguientes fracciones propias son irreductibles:

- $\frac{N}{2^2}$; origina 2 cifras decimales: 0, $\overline{ab}$.
- $\frac{N}{5^4}$; origina 4 cifras decimales: 0, $\overline{abcd}$.
- $\frac{N}{2^4 5^2}$; origina 4 cifras decimales: 0, $\overline{abcd}$.

2. Decimal inexacto

Posee infinita cantidad de cifras en la parte no entera. Se presentan dos casos:

a. Periódico puro

Presenta el período, inmediatamente después de la coma decimal.
Ejemplo: $0,\widehat{6} = 0,666\ldots$

$$12,\widehat{35} = 12,353535\ldots$$

Observaciones:
Estos números decimales son originados por fracciones irreductibles cuyo denominador está formado por factores primos diferentes a 2 y 5.
Ejemplos:

- $\frac{4}{3} = 1,\widehat{3}$
- $\frac{23}{11} = 2,0\widehat{9}$
- $\frac{35}{333} = 0,\widehat{105}$

La cantidad de cifras periódicas está dado por el menor número formado únicamente por cifras "nueve", que contiene exactamente al denominador de la fracción irreductible.
Tabla de los Nueves

$$9 = 3^2$$
$$99 = 3^2 \times 11$$
$$999 = 3^3 \times 37$$
$$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$$
$$99999 = 3^2 \times 41 \times 271$$
$$999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$$

Las siguientes fracciones son irreductibles; entonces:

- $\frac{N}{33}$ Origina 2 cifras periódicas (33 está en 99).
  ↓
  2 cifras
- $\frac{N}{101}$ Origina 4 cifras periódicas (101 está en 9999)
  ↓
  4 cifras

Si el denominador de la fracción irreductible es el producto de varios factores primos diferentes, el número de cifras periódicas está dada por el MCM de la cantidad de cifras de los menores números formados por cifras 9, que contengan a los factores primos indicados.
Ejemplo:

$$\frac{5}{7\times11\times101}\begin{cases}7\rightarrow 6\text{ cifras periódicas}\\11\rightarrow 2\text{ cifras periódicas}\\101\rightarrow 4\text{ cifras periódicas}\end{cases}$$

Entonces la fracción señalada tendrá:
MCM (6, 2, 4) = 12 cifras periódicas.

b. Periódico mixto

Presenta el periodo luego de una cifra o grupo de cifras después de la coma decimal.
Ejemplo:

$0,1\widehat{2} = 0,1222...$ $\qquad 2,43\widehat{57} = 2,435757...$

Observaciones:
Las fracciones irreductibles que originan estos números decimales, poseen en el denominador producto de potencias de 2 ó 5 y además factores primos diferentes a 2 y 5.
Ejemplo:

- $\frac{7}{82} = \frac{2}{2\times41} = 0,0\widehat{85365}$
- $\frac{13}{44} = \frac{13}{2^2\times11} = 0,\widehat{2954}$

Para encontrar la cantidad de cifras periódicas y no periódicas se procede según como se indica en los casos anteriores.
Ejemplo:
La fracción es irreductible:

- $\frac{N}{2^3\times5\times41}\begin{cases}3\text{ cifras no periódicas}\\5\text{ cifras periódicas}\end{cases}$

C. Fracción generatriz

Fracción común e irreductible equivalente a un número decimal.

- Para un decimal exacto:

$$\boxed{0,\overline{abcd} = \frac{\overline{abcd}}{10000}}$$

Si posee parte entera:

$E,\overline{abcd} = E + 0,\overline{abcd}$

- Para un decimal inexacto periódico puro:

$$\boxed{0,\widehat{abcd} = \frac{\overline{abcd}}{9999}}$$

Si posee parte entera:

$E,\widehat{abcd} = E + 0,\widehat{abcd}$

- Para un decimal inexacto periódico mixto:

$$\boxed{0,\overline{abxyz} = \frac{\overline{abxyz}-\overline{ab}}{99900}}$$

Si posee parte entera:

$E,\overline{ab}\,\widehat{xyz} = E + 0,\overline{ab}\,\widehat{xyz}$

Denominador	Cantidad de cifras
3; 9	1
11	2
27; 37	3
101	4
41; 271	5
7; 13	6
239; 4649	7
73; 137	8

Nota:
Si hay 2 o más factores se calculará el MCM de las cantidades de cifras

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1
Un estudiante tiene que resolver ciertos problemas de ciencias en tres días. El primer día resuelve 3/10 del total, al día siguiente 4/7 del resto y el último día los 27 problemas restantes. ¿Cuál fue la cantidad de problemas que resolvió en los tres días?

A) 90 B) 80
C) 70 D) 60
E) 50

UNMSM 2004

Resolución:
Sea la cantidad problemas: P

	Resuelve	Queda
1.er día:	3/10 P	7/10 P
2.do día:	$\frac{4}{7}\left(\frac{7}{10}P\right)$	$\frac{3}{7}\left(\frac{7}{10}P\right)$
3.er día:	$\frac{3}{7}\left(\frac{7}{10}P\right) = 27$	
	P = 90	

Respuesta: P = 90

Problema 2
Un caño llena un tanque vacío en 4 horas y otro llena el mismo tanque en 12 horas. Si se abren ambos caños a la vez estando el tanque vacío, ¿en cuántas horas se llenará el tanque?

A) 3 h
B) 4 h
C) 2 h
D) 5 h
E) 1 h

UNMSM 1999

Resolución:

En 1 hora **En 1 hora A y B**

$$\left.\begin{array}{l} A \Rightarrow \frac{1}{4} \\ B \Rightarrow \frac{1}{12} \end{array}\right\} \frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

Los dos caños juntos llenarán el tanque en 3 horas

Respuesta: 3h

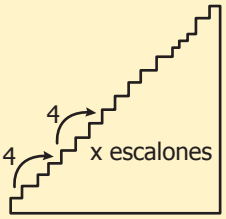
Problema 3

Si al subir una escalera de 4 en 4 escalones doy 3 pasos más que subiendo de 5 en 5 escalones, ¿cuántos escalones tiene la escalera?

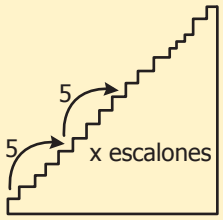
A) 40 B) 60
C) 50 D) 70
E) 90

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:



N° de pasos $= \frac{x}{4}$



N° de pasos $= \frac{x}{5}$

En el primer caso, se dieron 3 pasos más que en el segundo caso; por lo tanto:

$$\frac{x}{4}=\frac{x}{5}+3$$

Resolviendo: $x = 60$

Respuesta: 60

TANTO POR CIENTO

DESARROLLO DEL TEMA

I. INTRODUCCIÓN

La expresión "..... por ciento" es derivada de la expresión latina "*.....per centum",* apareciendo en las principales obras de aritmética en la Italia del siglo XV y su signo (%) fue fruto de una sucesiva mutilación a través de los tiempos, de la abreviatura de 100 (cto); apareciendo éste en un libro de comercio y ciencias mercantiles en el año 1685.

II. DEFINICIÓN

El tanto por ciento viene a ser o una, o varias, de las cien partes en las cuales se divide una cierta cantidad. Por ejemplo, si decimos que el 10% de 100 es igual a 10; es porque éste se sustenta en el hecho de que al número 100 se le dividen en 100 partes regulares (perfectamente iguales), de manera tal que se consideran de dichas partes a unas diez. Las partes que se pueden considerar respecto de una determinada cantidad pueden ser tanto como fraccionarias.

Notación:

$$\frac{A}{100} = A\%$$

Si a% de b es igual a c : $a\%b = c \Leftrightarrow \frac{a}{100}(b) = c$

III. PORCENTAJE

Es el resultado de aplicar el tanto por ciento a una determinada cantidad.

A. Operaciones con porcentajes

1. Sumas y/o restas

$$a\% \pm b\% = (a \pm b)\%$$

$$a\% \text{ de } N \pm b\% \text{ de } N = (a \pm b)\% \text{ de } N$$

$$N = 100\%N$$

2. Producto

$$a\% \times b\% = \frac{a}{100} \times \frac{b}{100} = \left(\frac{ab}{100}\right)\%$$

IV. DESCUENTO SUCESIVO

Si tenemos 2 descuentos sucesivos del a % más el b % se verifica que el descuento único (DU) equivalente será:

$$D_U = \left[a + b - \frac{a.b}{100}\right]\%$$

V. AUMENTO SUCESIVO

Para 2 aumentos sucesivos del a % más el b % el aumento único (AU) equivalente es:

$$A_U = \left[a + b + \frac{a.b}{100}\right]\%$$

VI. ASUNTOS COMERCIALES

Una transacción comercial es el intercambio de bienes y servicios a cambio de dinero que se establece entre dos o más personas, de manera que la persona que vende dicho bien o dicho servicio puede obtener –como consecuencia de la transacción– un beneficio o una pérdida de su patrimonio.

Para poder enfrentar distintas situaciones relacionadas con los asuntos comerciales, **es fundamental y suficiente** el correcto conocimiento de la definición de porcentaje; aunque también es necesario conocer las definiciones de las relaciones financieras dadas a continuación:

1. **Precio de Venta (Pv):** es aquel con el cual se cotiza un determinado artículo. Ejem: si en el mercado observamos que el kilo de Azúcar cuesta S/ 1,50 entonces decimos que S/ 1,50 es el precio de venta del azúcar.
2. **Precio de Costo ó de Compra (Pc):** es aquel con el cual se adquiere un determinado artículo para su

posterior uso. Así por ejemplo, si compramos un costal de 10 kilos de arroz a 12 soles, es decir, S/ 1,20 por cada kilo de arroz, decimos que 12 es el precio de costo por que ese fue el precio establecido para poder adquirir dicho producto.

3. **Precio Fijado, de Catálogo ó Precio de Lista (PL):** es el precio determinado en una lista o catálogo de diversas compañías o establecimientos comerciales. Ejemplo: Los precios de una determinada marca de zapatillas de vestir en una tienda de ropa.

4. **Ganancia, Beneficio, Renta o Utilidad (G):** es la cantidad que se obtiene cuando se vende cierto elemento a un precio mayor de lo que costo originalmente. Ejemplo: Si un televisor se compra a 200 dólares y luego se vende a 300 dólares, hablamos de una utilidad de 100 dólares.

5. **Pérdida (P):** es la cantidad que se obtiene cuando se vende cierto elemento a un precio menor que lo que costo originalmente. Ejemplo: Si se compra un televisor a 300 dólares y se vende en 250 dólares, hablamos de una pérdida de 50 dólares.

6. **Descuento (dscto; D):** Reducción sobre el precio de venta de un artículo, otorgada al comprador.

Obs.:

1. Se determina al precio de venta como la suma del precio de costo y la ganancia.

$\boxed{Pv = Pc + G}$; donde $Pv > Pc$

2. Se determina al precio de costo como la suma del precio de venta y la pérdida.

$\boxed{Pc = Pv + P}$; donde $Pv < Pc$

3. Se define al precio de lista como la suma del precio de venta y el descuento.

$\boxed{PL = Pv + D}$; donde $Pv < PL$

- Generalmente la G y P son en función de Pc y descuento del PL

$G = f(Pc)$; $P = f(Pc)$; $D = f(PL)$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Se disminuye el ancho de un afiche rectangular en 10% y el largo, en 30%. ¿Qué porcentaje del área original representa el área del afiche restante?

NIVEL INTERMEDIO

UNMSM 2011-II

A) 45% B) 63% C) 77%
D) 70% E) 56%

Resolución:

Ancho: A
Largo: B
Área inicial: 100%a.b
Nuevo ancho: 90%a
Nuevo largo: 70%b
Nueva área: 90%a.70%b = 63%a.b

Respuesta: 63%

Problema 2

Una empresa informática emplea a 800 personas. De ellos, 42% son varones y el 50% de los varones no tiene más de 30 años. ¿Cuántos varones de esta manera son mayores de 30 años?

NIVEL FÁCIL

UNMSM 2007-I

A) 168 B) 173 C) 183
D) 156 E) 178

Resolución:

Varones 42%.800 = 36

50%.336 = 168 varones ≤ 30 años

Varones mayores de 30 años:

336 – 168 = 168

Respuesta: 168

Problema 3

Al vender un objeto ganando el 45% del precio de costo se ganó 210 soles más que si se hubiera vendido ganando solo el 15% del precio de costo.

¿Cuánto costó el objeto?

NIVEL FÁCIL

UNMSM 2007-II

A) S/. 1400 B) S/. 700
C) S/. 560 D) S/. 1050
E) S/. 840

Resolución:

15% Pc + 210 = 45%Pc

entonces

201 = 30% Pc

Pc = 700 soles

Respuesta: 700

REGLA DE INTERÉS

DESARROLLO DEL TEMA

I. INTERÉS

Llamamos interés al beneficio o ganancia generado por un bien o capital, que ha sido prestado o depositado durante un periodo de tiempo a una cierta condición financiera (tasas).

Elementos que intervienen en el Cálculo del Interés

A. Capital

Lo denotaremos con la letra "C" y es el dinero invertido o el bien prestado.

B. Tiempo

Es el período durante el cual se presta el capital y lo denotamos con la letra "t".
Tomaremos en consideración:

* 1 mes comercial <> 30 días
* 1 año comercial <> 360 días
* 1 año común <> 365 días
* 1 año bisiesto <> 366 días

C. Tasa de interés

O llamado también rédito, la denotamos con el símbolo "r%", quiere decir r partes de cada 100 unidades prestadas en una unidad de tiempo.
Ejemplo:

- 6% mensual <> Cada mes se recibe 6 partes de cada 100 partes del capital prestado.
- 12% trimestral <> Cada tres meses se recibe 12 partes de cada 100 partes del capital prestado.
- 35% semestral <> Cada 6 meses se recibe 35 partes de cada 100 partes del capital prestado.

Tasas Equivalentes:

Diremos que:

4% mensual ⟨
- 8% Bimestral
- 12% Trimestral
- 16% Cuatrimestral
- 24% Semestral
- 48% Anual

Fórmulas del interés

- Si la tasa y el tiempo están en un mismo periodo:

$$I = C \times r\,\% \times t$$

- Si la tasa está en años y el tiempo en meses:

$$I = \frac{C \times r\,\% \times t}{12}$$

- Si la tasa está en años y el tiempo en días:

$$I = \frac{C \times r\,\% \times t}{360}$$

D. Monto

Lo denotamos con la letra "M" y es igual a la cantidad final de cada periodo o la suma del capital y los intereses generados o producidos por el mismo.

$$M = C(1 + r\,\% \times t)$$

Donde por lo general la tasa se encuentra en años.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1
Una persona tiene S/ 16 000 que presta al 5% trimestral y otra tiene S/ 20 000 que en presta al 5% cuatrimestral. ¿Dentro de cuanto tiempo los montos serán iguales?
A) 10 años
B) 11 años
C) 14 años
D) 18 años
E) 20 años

Resolución:
C = 16 000
5% trimestral <> 20 % anual
M_1
C2 = 20000
5 % cuatrimestral <> 15 % anual.
M_2

Por dato:

$$C_1\left[1+\frac{20}{100}\times t\right]=C_2\left[1+\frac{15}{100}\times t\right]$$

$$4\left[1+\frac{4}{20}t\right]=5\left[1+\frac{3}{20}t\right]$$

$$4+\frac{4}{5}t=5+\frac{3}{4}t$$

$$\frac{t}{20}\,t=1;\ t=20 \text{ años}$$

Respuesta: 20 años

Problema 2
Carlos depositó $8000 a una tasa de interés del 0,5.% mensual. ¿Cuánto ganará en 3 años?
A) $ 1400
B) $ 1800
C) $ 1440
D) $ 2000
E) $ 3000

Resolución:
Como la tasa es mensual y el tiempo está en años, debemos convertir cualquiera de las dos a las unidades de la otra.
Convertiremos la tasa de interés:
0,5% mensual <> 12 × 0,5 = 6% anual
Luego:
C = $8 000
r = 0,5% mensual = 6% anual mismas unidades
t = 3 años

$$I=??\rightarrow I=\frac{C.\,r.\,t}{100}=\frac{8000\times 6\times 3}{100}$$

$$=\$1440$$

Respuesta: $1440

Problema 3
Luis se prestó S/.9 000 del Banco de Crédito a una tasa del 14 % anual, pactando devolverlo en 5 meses. ¿Qué suma tendrá que devolver al banco al vencerse el plazo?
A) 9000
B) 7000
C) 6582
D) 3562
E) 9525

Resolución:
C = S/ 9000

r = 14% anual

t = 5 meses = 5/12 año
M = ??

$$I=\frac{C.\,r.\,t}{100}=\frac{9000\times 14\times \frac{5}{12}}{100}=S/.525$$

Como nos piden la suma que debe devolver al banco, se suma el capital más los intereses, denominándose esto el monto (M).

M = C + I

M = 9000 + 525 = 9525

Respuesta: 9525